Pendulum hullám fizikai háttere és matematikai leírása

Fizikai alapok „kezdőknek”:

Kötélre függesztett testet egyensúlyi helyzetéből kitérítve, majd magára hagyva, a test egy körív mentén periodikus ún. ingamozgást végez. Elhanyagolható tömegű, hosszú kötélen lógó kisméretű (pontszerű) test esetén matematikai ingáról (vagy más néven fonálingáról) beszélünk. Igazolható, hogy egy matematikai inga mozgása kis szögkitérés ($\approx \varphi \leq 5°$) esetén harmonikus rezgőmozgásnak tekinthető.

Ha a test két szélső helyzete között egyenes vonalú pályán, periodikusan mozog, rezgőmozgásról beszélünk. Amennyiben ennek a rezgőmozgásnak a kitérése az idő függvényében szinusz függvénnyel írható le, akkor harmonikus rezgőmozgásnak nevezzük. Ilyen például egy elhanyagolható tömegű rugóra akasztott, nyugalmi helyzetéből kitérített, majd magára hagyott pontszerű test mozgása, amennyiben a külső erőktől származó egyéb hatásoktól (pl.: közegellenállás) eltekintünk, valamint a rugót csak kis mértékben térítjük ki (maradandó alakváltozást nem okozunk rajta).

A matematikai inga harmonikus rezgőmozgással való kapcsolatának felhasználásával megmutatható, hogy egy matematikai inga lengésideje kis szögkitérések esetén a $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ összefüggésből meghatározható, ahol T az inga periódusideje, l a kötél hossza, g a nehézségi gyorsulás. Az inga lengési síkját megtartja, valamint kis kitérésekre lengésideje sem változik lényegesen.

Az eszköz elkészítéséhez szükséges matematikai háttér „haladóknak”:

Jelöléseink: A pendulum hullámban lévő ingákat (golyókat) beszámozzuk: $i = 0,1,2,3, \dots, n$.

A pendulum így ***összesen*** $(\boldsymbol{n+1})$ ***db ingából áll***. Legyen a nulladik inga a leghosszabb.

$\boldsymbol{\tau \rightarrow}$ ***pendulum hullám teljes periódusideje*** (az a legkisebb idő, amely alatt a pendulum hullámban lévő összes inga ismét egyszerre éppen a kezdeti pozíciójába ér)

$\boldsymbol{T_i \rightarrow}$ ***i − edik inga periódusideje***

$\boldsymbol{l_i \rightarrow}$ ***i − edik kötél hossza***

$\boldsymbol{N}$ ***− a leghosszabb*** $(\boldsymbol{i = 0})$ ***inga*** $\boldsymbol{\tau}$ ***idő alatti lengéseinek száma***

i – inga sorszáma	τ idő alatti lengések száma	T_i
0	N	$T_0 = \frac{\tau}{N}$
1	N+1	$T_1 = \frac{\tau}{N+1}$
2	N+2	$T_2 = \frac{\tau}{N+2}$
. . i . .	. . $N+i$ . .	. . $T_i = \frac{\tau}{N+i}$ . .
n	N+n	$\boldsymbol{T_n = \frac{\tau}{N+n}}$

A kötélhosszak megadására vonatkozó összefüggést két különböző módon is bemutatjuk.

1. A fenti táblázat alapján **adott $\boldsymbol{\tau, n, N}$ esetén** az egyes ingák hossza:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow l_i = \frac{g}{4\pi^2} \cdot {T_i}^2 \rightarrow \boldsymbol{l_i = \frac{g}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{\tau}{N+i}\right)^2}$$

Az adatok egy lehetséges és kivitelezhető megadása:

$\tau = 90\ s - a\ pendulum\ hullám\ teljes\ periódusideje$
$n = 15\ \rightarrow n + 1 = 16\ db\ golyó$
$N = 52 - a\ legosszabb\ inga\ lengéseinek\ száma\ egy\ teljes\ \tau\ periódusidő\ alatt$

Ezekből az adatokból a fentebbi összefüggés alapján meghatározhatóak a szükséges kötélhosszak. Ennek eredménye az iménti adatokkal táblázatban összefoglalva:

i	l_i [cm]	i	l_i [cm]
0	74,4	8	55,9
1	71,7	9	54,1
2	69,0	10	52,4
3	66,5	11	50,7
4	64,2	12	49,1
5	62,0	13	47,6
6	59,8	14	46,2
7	57,8	15	44,8

2. A hosszak **rekurzióval** is megadhatók a következő módon:

$\tau = (N+i) \cdot T_i = (N+i+1) \cdot T_{i+1}$, ahol $\boldsymbol{i = 0, 1, 2, \ldots, n}$

Ebből és az előzőek felhasználásával:

$$\frac{N+i}{N+i+1} = \frac{T_{i+1}}{T_i} = \sqrt{\frac{l_{i+1}}{l_i}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{l_{i+1} = l_i \cdot \left(\frac{N+i}{N+i+1}\right)^2}$$

Érdekes kérdés, hogy más elrendeződés (például lineárisan növekvő kötélhosszak) esetén milyen mintázatok jöhetnek ki. Látunk-e hasonlóan „szépet”? Ez egy megfelelő szimulációval, ahol a különböző paraméterek könnyedén állíthatóak, gyorsan ellenőrizhető.

Lendvai Dorottya
Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
2014