

Logika – logikai áramkörök

A matematikai logika egy alkalmazása a középiskolai matematika- és informatikaórákon

Szerk: Nagy Péter

2007

Bevezetés

1. Mi a logika?

A logika a görög *logosz* szóból származik. Jelentése beszéd, gondolat. Az egyik legrégebbi tudomány, hiszen magába foglalja a klasszikus ókori filozófiai logikát éppen úgy, mint a modern matematikai logikát.

A logika - akár a filozófia, akár a matematika részeként tekintjük - a gondolkodás törvényszerűségeit kutatja. A matematikai logika egyrészt önálló ága a matematikának, másrészt annak különböző részterületei közti összefüggéseket is kutatja a megfelelő szimbólumrendszer bevezetésével.

2. A logika története

Bár a logikus gondolkodás mondhatni egyidős az emberiséggel, a logika, mint tudomány, fejlődésének első nagy fordulópontja az ókorra tehető. A logikára nagy hatást gyakorló gondolkodók közül legelsőként az [éleai Zénón](#) említhető meg, akinek híres [apóriái](#) nagy hatással voltak az őt követő gondolkodókra is. Később [Szókratész](#) az [indukció](#)val, fogalmakkal és állításokkal foglalkozott különböző elméletek felállításának kapcsán. [Arisztotelész](#) logikai szempontból legfontosabb műve az [Organon](#), ezen belül is az Első Analitika és a Második Analitika címet viselő könyvek, melyben tulajdonképpen megalapozta a logikát. Következtetéseket állított fel, ahol már betűkkel jelölte a bennük előforduló változtatható részeket. Három logikai alapszabályt határozott meg, melyek oly sokáig az egyetlen alapját képezték a matematikának. Ezek a következők voltak: [azonosság elve](#), [ellentmondás elve](#) és a [harmadik kizárásának elve](#). A sztoikusok vezették be a kijelentésváltozókat a logikában. Korábban Arisztotelész csak a fogalmakra használt változókat. A [sztoikus filozófiai iskola](#) alapítója a [kritoni Zénón](#) volt. Másik nagy alakja pedig [Khrüsziposz](#), akinek nevéhez fűződik sztoikus logika rendszerezése.

Az arisztotelészi logika nagy hatást gyakorolt a gondolkodókra, tudósokra mintegy kétezer éven keresztül, hiszen szinte bármely tudományban alkalmazható volt.

Ennek következtében a középkorban a logika közel azonos szinten maradt.

A [skolasztikus Occam](#) nevéhez fűződnek fontos eredmények ebben az időszakban. Ugyanebben a korban fontos szerepet játszott [Ibn Szina \(Avicenna\)](#) Alexandriában, aki rendszerezte a görög tudományokat Arisztotelész logikán alapuló rendszerét továbbfejlesztve.

Sokáig lassan fejlődött a matematikai logika. A nagy lépés [Boole](#) és [De Morgan](#) nevéhez fűződik. Boole mutatta ki, hogy a formális logika törvényeit a matematikában is lehet használni, s leírta az általa bevezetett szimbólumokkal a logika legalapvetőbb törvényeit.

De Morgan vele egy időben ugyanilyen eredményre jutott.

A 19. században kapott új lendületet a logika fejlődése. [Venn](#) a szimbolikus logika vizsgálatával foglalkozott. [Peano](#) pedig a természetes számok vizsgálata során alkalmazott logikai eszközöket.

A [Cantor](#) által felépített halmazelméletben több ellentmondás ([antinómia](#)) is felmerült, melyek közül az elsőt épp Cantor maga tárta fel. Ez a matematikai válság azonban újabb lendületet adott a logika fejlődésének, hiszen az ellentmondások mindegyike a kétértékű logikán, mégpedig a [harmadik kizárásának elvén](#) alapult.

Először [Lukasiewicz](#) vetette fel a háromértékű logika lehetőségét, ahol egy állításnak három logikai értéke lehet:

- igaz
- hamis
- harmadik lehetőség (pl. eldönthetetlen).

Ez az elmélet a gyakorlatban is felhasználható. Kvantummechanikai alkalmazhatóságának egyik felfedezője Neumann János volt.

A **fuzzy** (fuzzy = elmosódott, bolyhos, nem éles határú) logika még tovább ment. Míg a kétértékű logikában csak a 0 (hamis) és az 1 (igaz) logikai érték lehetséges, addig itt bármely 0 és 1 közötti számértéket fölvehet. A többértékű logika gondolatát a halmazelméletben először [Zadeh](#) vezette be az ún. fuzzy-részhalmoz fogalmán keresztül. Ebből kiindulva felépíthetővé vált egy teljes matematikai irányzat (fuzzy-matematika), melynek egy ága a fuzzy-logika. Míg a hagyományos kétértékű logika és a technika összefonódásának köszönhető a számítógép, addig a fuzzy-logika főként a vezérlést forradalmasította (videó kamerák, porszívók, mosógépek készülnek ezen technika segítségével).

Kijelentéslogika

1. Kijelentések

A kijelentés (ítélet vagy állítás) olyan jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondat, amely vagy igaz, vagy hamis, de nem lehet egy időben igaz is és hamis is. Jelölés: $p, q, r, \dots x, y, z, \dots$, ezeket **kijelentésváltozóknak** nevezzük.

Például:

p : „Az öt páratlan szám.” - igaz kijelentés

q : „A macska növény.” – hamis kijelentés

r : „Minden kettőnél nagyobb páros szám felbontható két prímszám összegére.” – kijelentés, de erről nem tudjuk jelenlegi ismereteink segítségével eldönteni, hogy igaz vagy hamis. (Goldbach-sejtés)

A „Szépek a fogaid, Laci.” Mondat nem kijelentés, mert még ha van is a jelenlevők között László, akkor sem lehet egyértelműen meghatározni fogai szépségét, hiszen mindenkinek mást jelent a „szép fog”.

Nem kijelentések a kérdő és felkiáltó mondatok és nem tekintjük kijelentésnek a definíciókat sem. Például, az „Egy kettővel osztható számot párosnak nevezünk.” mondat nem kijelentés, de a „Minden páros szám osztható 2-vel.” már igen.

„Most nem mondok igazat.” mondat nem kijelentés, mert ellentmondásos.

Az „igaz” illetve „hamis” a kijelentés **logikai értéke** vagy **igazságértéke**, ezeket a továbbiakban 1 (vagy i), 0 (vagy h) jelöli. Ha p egy adott kijelentés, akkor ennek logikai értékét $|p|$ jelöli, így a fenti kijelentésekre $|p| = 1$ és $|q| = 0$.

2. Műveletek kijelentésekkel

Kijelentés-logikai műveletek: Kijelentések közötti műveletekről csak abban az esetben beszélünk, ha a kapott összetett mondat is kijelentés, és annak logikai értékét a komponensek logikai értéke egyértelműen meghatározza.

Két kijelentés összekapcsolása esetén 16 különböző eredmény fordulhat elő, amelyet az alábbi táblázatban láthatunk:

		$M(A;B)$															
A	B	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}
		0	1	2	3	4	5										
i	i	i	i	i	i	h	i	i	h	i	h	h	i	h	h	h	h
i	h	i	i	i	h	i	i	h	i	h	i	h	h	i	h	h	h
h	i	i	i	h	i	i	h	i	i	h	h	i	h	h	i	h	h
h	h	i	h	i	i	i	h	h	h	i	i	i	h	h	h	i	h

2.1. Negáció (tagadás): Egy tetszőleges p kijelentés negációján a „nem p ” (nem igaz, hogy p) kijelentést, vagy ennek átfogalmazott alakját értjük. Jele: $\neg p$

A negáció logikai értéke:

p	$\neg p$
i	h
h	i

A negáció tulajdonságai:

Kettős tagadás: $\neg \neg p = p$

2.2. Konjunkció (összekapcsolás): Tetszőleges p, q kijelentések konjunkcióján a „ p és q ” kijelentést, vagy ennek átfogalmazott alakját értjük. Jele: $p \wedge q$

A konjunkció logikai értéke:

p	q	$p \wedge q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A konjunkció tulajdonságai:

Kommutatív: $p \wedge q = q \wedge p$

Asszociatív: $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r = p \wedge q \wedge r$

Idempotens: $p \wedge p = p$

2.3. Diszjunkció (szétválasztás): Tetszőleges p, q kijelentések diszjunkcióján a „ p vagy q ” kijelentést, vagy ennek átfogalmazott alakját értjük. Jele: $p \vee q$

A diszjunkció logikai értéke:

p	q	$p \vee q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A diszjunkció tulajdonságai:

Kommutatív: $p \vee q = q \vee p$
 Asszociatív: $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r = p \vee q \vee r$
 Idempotens: $p \vee p = p$

A negációt, a konjunkciót és a diszjunkciót összekapcsoló tulajdonságok:

Abszorpció: A konjunkció (diszjunkció) abszorptív a diszjunkcióra (konjunkcióra) nézve.

$$p \wedge (p \vee q) = p \qquad p \vee (p \wedge q) = p$$

De Morgan azonosságok: Két kijelentés konjunkciójának (diszjunkciójának) negációja logikailag ekvivalens a két kijelentés negációjának diszjunkciójával (konjunkciójával).

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

Disztributivitás: A konjunkció (diszjunkció) disztributív a diszjunkcióra (konjunkcióra) nézve.

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Megjegyzés: A logikában érvényes a **dualitás elve**: A konjunkció és diszjunkció jeleit, illetve az i és h logikai konstansokat kicserélve igaz állításból igaz állítást kapunk.

2.4. Implikáció (összefonódás): Tetszőleges p, q kijelentések implikációján a „ha p akkor q ” kijelentést, vagy ennek átfogalmazott alakját értjük. Jele: $p \rightarrow q$

Az implikáció logikai értéke:

p	q	$p \rightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Az implikáció tulajdonságai: Nem kommutatív, nem asszociatív és nem idempotens.

A $p \rightarrow q$ implikáció megfordításán a $q \rightarrow p$ implikációt értjük.

A $p \rightarrow q$ implikáció kontrapozícióján a $\neg q \rightarrow \neg p$ implikációt értjük. Az implikáció logikai értéke megegyezik a kontrapozíciója logikai értékével.

Ekvivalencia (egyenértékűség): Tetszőleges p, q kijelentések ekvivalenciáján a „ha p , akkor és csak akkor q ” kijelentést, vagy ennek átfogalmazott alakját értjük. Jele: $p \leftrightarrow q$

Az ekvivalencia logikai értéke:

p	q	$p \leftrightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Az ekvivalencia tulajdonságai:

Kommutatív: $p \leftrightarrow q = q \leftrightarrow p$

Asszociatív: $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r = p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$

Nem idempotens: $p \leftrightarrow p = i$

„Sem-sem művelet”: a köznapi életben ritkán, de szerepel az a logikai művelet, amelyet a „sem..., sem...” logikai kapcsolószavakkal fejezünk ki. Ennek a matematikai modellje a sem-sem művelet. Jele: $p \downarrow q$

Az „sem-sem művelet” logikai értéke:

p	q	$p \downarrow q$
i	i	h
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Sheffer-féle művelet: a mindennapi életben van a „vagy” kapcsolószónak olyan értelme is, amikor azt fejezzük ki, hogy a két állítás nem lehet egyszerre igaz, minden más eset előfordulhat. Ezt modellezi az ún. Sheffer-féle művelet. Jele: $p|q$

Az Sheffer-féle művelet logikai értéke:

p	q	$p q$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	i

Antivalencia: a hétköznapi nyelvben szintén a „vagy” szóval lehet kifejezni, de itt a „vagy”-ot választó értelemben értjük. Ez a művelet gyakorlatilag megegyezik a modulo 2 összeadással. Jele: $p \oplus q$

Az antivalencia logikai értéke:

p	q	$p \oplus q$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Ezek után a táblázatunk így fog kinézni:

		$M(A;B)$															
A	B	i	$A \vee B$	M_3	$A \rightarrow B$	$A B$	A	B	$A \oplus B$	$A \leftrightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$A \wedge B$	M_{13}	M_{14}	$A \downarrow B$	h
i	i	i	i	i	i	h	i	i	h	i	h	h	i	h	h	h	h
i	h	i	i	i	h	i	i	h	i	h	i	h	h	i	h	h	h
h	i	i	i	h	i	i	h	i	i	h	h	i	h	h	i	h	h
h	h	i	h	i	i	i	h	h	h	i	i	i	h	h	h	i	h

Észrevétel: a táblázatban az első nyolc és a második nyolc oszlop szinte tükörképe egymásnak, mindössze az i -ket és a h -kat kell kicserélni. Innen triviálisan adódnak a következő összefüggések:

a) $A \vee B = \neg(A \downarrow B)$

b) $A|B = \neg(A \wedge B)$

c) $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$

d) $M_3 = \neg M_{14} ; M_{13} = A \rightarrow B$

Feladatok

1. Bizonyítsd be az alábbi összefüggéseket!

a. $p \wedge (p \vee q) = p$

b. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

c. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

2. Igazold a következő állításokat!

- i. $A \rightarrow B = \neg A \vee B$
- ii. $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- iii. $(A \wedge B) \rightarrow C = A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Logikai áramkörök – vázlat az SZF4mtt diákhoz

- fizikai megvalósítása: és, vagy kapcsolás, inverter
- bináris adatok – kapcsolók állása, lámpa világít/nem világít
- bitek, 2-es számrendszer, számrendszerek kell-e? alapvető számolások: összeadás, szorzás, példák 2-es számrendszerben
- kivonásnál előjön: számábrázolások: fixpontos, lebegőpontos(csak említés)
- fixpontoson belül: egyes komplement, kettes komplement, többletes
- **kettes komplement**: példák, gyakorlás
- **logikai áramköri elemek**: OR, NOR, XOR, XNOR, NOT, AND, NAND

Információfeldolgozás

- rissa a számítógépről, információról(pl grafika), adatokról, 2-es számrendszerről

☐ **Multiplexer:** adatok kiválasztása

☐ **Összeadó áramkör:**

- Értéktáblázat alapján észrevevessük: az első bit: XOR, átvitel: AND

x	y	összeg	átvitel
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

■ Több bites számnál carry? **Teljes összeadó**

- Tetszőleges bitre kész az összeadó!

☐ **Kivonó áramkör:** kettes komplementben ez is összeadás, csak negálni kell

☐ **Szorzás:** ugyanaz, mint az összeadás, csak az egyes részeredményeket tárolni kell – **regiszter**

☐ **Osztás:** ismételt kivonásra épül

Ha nincs olyan sok fajta logikai kapum (avagy olcsóbb legyártani 2-3 fajtát) akkor NOT, AND, OR kapukkal mindenfajta áramkört meg tudok valósítani (normálformák) (sőt, csak kettővel is), de nagyon sok elemet kell kapcsolgatni!

Információtárolás

- S-R tároló
- C, D, MS, JK tárolók
- Regiszterek
- RAM - ROM