AZ ELLIPSZISRŐL (MÁR CSAK?) FIZIKAÓRÁN

Baranyai Klára
Berzsenyi Dániel Gimnázium

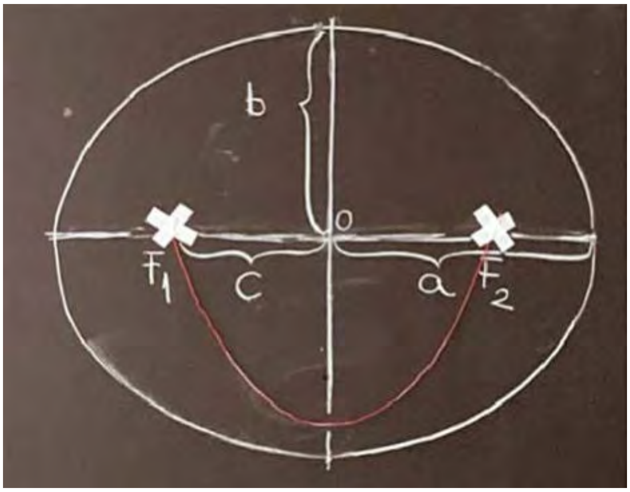
Az ellipszis a normál fizikaórán

A fizika tanítása közben egyre gyakrabban ütközünk (és az új NAT bevezetésével még gyakrabban fogunk ütközni) abba a problémába, hogy matematikából ismertnek gondolt dolgokra hivatkozunk, amikről kiderül, hogy a gyerekeknek fogalmuk sincs róluk.

Tipikusan ilyen az ellipszis, amiről régen matematikaórán kilencedikben, a halmazok témakörében mint ponthalmazról megtanulták, hogy mi a definíciója. Mára még az emelt szintű érettségi anyagából is kikerült a hiperbolával együtt. Valami fogalmuk van a gyerekeknek arról, hogy az ellipszis lapult körféleség, de a pontos definícióját, vagy a fókuszpontjainak mibenlétét nem ismerik.

Ha értelmesen szeretnénk a Kepler-törvényekről beszélni, szűkös időnkben tehát még az ellipszis definícióját is meg kell tanítanunk. Ez nem is olyan nehéz, egy fonál és

Baranyai Klára 1988-ben szerzett matematika-fizika szakos tanári diplomát az ELTE TTK-n. Azóta a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnáziumban tanít. Az ELTE Fizika Tanítása Doktori Programban szerzett PhD fokozatot 2015-ben.



1. ábra. Ellipszis rajzolása a táblára

némi ragasztószalag segítségével a táblára rajzolva gyorsan megmutathatjuk *(1. ábra)*. A gyerekek pedig általában örülnek a táblán mosolygó ellipszisnek, gyorsan lefényképezik, és azt gondolják, hogy ezzel meg is tanulták.

Az ellipszis a tehetséggondozásban

Az iskolámban minden évben szervezünk tehetséggondozó fizikatábort, ahová a legérdeklődőbb diákokat hívjuk el [1]. A változatos tábori programban szerepel kiscsoportos mérés is, minden évfolyamnak más-más feladattal. A tizenegyedikesek számára az idén az ellipszishez kapcsolódó feladatokat gyűjtöttünk össze. Ennek a csokornak minden része ismert, a versenyfelkészítés magasabb szintjein megjelenik. De talán mások számára is érdekes lehet – gondolatébresztő kiscsoportos vagy egyéni projektmunkákhoz –, ha például valaki fizikát és matematikát összekapcsoló feladatot szeretne a diákjainak adni, ami túlmutat a kötelező tananyagon. Ez a csokor korántsem teljes, az ellipszis még számtalan helyen felbukkan (például a geometriai és a hullámoptikában [2], a relativitáselméletben [3], a rezgőmozgás fázisterében), amikről itt nem esik szó.

A súrlódásmentes talajon eldőlő pálca végpontjának pályája és az ellipszográf

Milyen pályát írnak le a súrlódásmentes talajon eldőlő pálca pontjai?

A mérés előkészületeként egy farúd alsó végére csapágyakat szereltünk, így a rúd alsó vége jó közelítéssel súrlódásmentesen mozoghatott a talajon a csapágykerekeken *(2. ábra)*. A diákok a rudat függőleges helyzetből lökésmentesen elengedték, és a dőlés síkjára merőleges nézőpontból videóra vették a mozgását. A rúd egyes pontjait színes pöttyök felragasztásával megjelölték, így a videó alkalmas volt arra, hogy az emelt érettségin is szereplő Tracker programmal kirajzoltassák a mozgás pályáját. A pálya ellipszisívnek látszik. De vajon tényleg az?

2. ábra. Csapágykerekek a rúd végén

A rúd tömegközéppontja (S) függőleges pályán mozog, hiszen a rúdra csak a talaj függőleges nyomóereje, illetve a szintén függőleges nehézségi erő hat. A rúd alsó vége (A) vízszintesen mozog, hiszen a talaj vízszintes. Írjuk le a mozgást egy olyan derékszögű koordináta-rendszerben, amelynek x-tengelye a talajon fekvő vízszintes, y-tengelye pedig a kezdetben függőleges pálcán megy át! Legyen a pálca hossza a, a tömegközéppont távolsága a pálca felső végétől b. Ha a pálca dőlése közben α szöget zár be a vízszintessel, az ábráról leolvashatók a végpont koordinátái:

$$x = b \cdot \cos \alpha, \qquad y = a \cdot \sin \alpha .$$

A tizenegyedikes diákok év vége felé már tanultak koordinátageometriát. Lelkes, a régebbi tananyagot még ismerő matematikatanáraiknak köszönhetően mindegyikük ismerte az ellipszis kanonikus egyenletét:

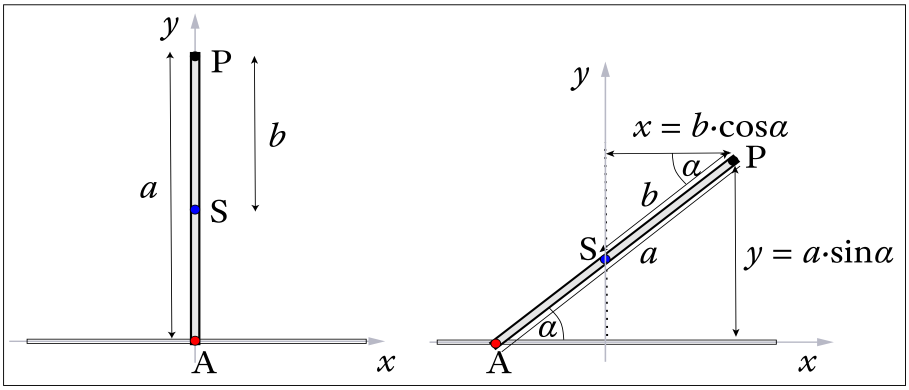
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Összevetve a fenti egyenletekkel látható, hogy esetünkben a pálya paraméteres egyenletrendszere egy olyan ellipszist határoz meg, amelynek nagytengelye függőleges és a pálca hosszának kétszeresével egyenlő, kistengelye vízszintes és a b távolság kétszeresével egyenlő.

Ha a pálca egy másik pontjának pályáját szeretnénk meghatározni, hasonló eredményre jutunk, csak ott a nagytengely felét a pont talaj feletti magassága, a kistengely felét pedig a pontnak a tömegközépponttól mért távolsága határozza meg. Az ellipszis fókuszpontjait csak közvetetten szerkeszthetjük meg az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés segítségével (a c-t lásd az *1. ábrán*).

Ez a tény a versenyfeladatok világában nem újdonság, de ma már egyre kevesebb diák gondolja végig. Ráadásul nagyon érdekesen kapcsolódik egy ellipszisrajzoló szerkezethez, egy úgynevezett ellipszográfhoz, ami a zsinóros módszertől különböző utat kínál szabályos ellipszis rajzolásához.

Ez az ellipszográf *(4. ábra)* egy sík lapon mozgó pálca. A sík lapban két, egymásra merőleges, egyenes horony van. A pálca két tetszőlegesen kiszemelt pontjára olyan csúszkát szerelnek, ami lehetővé teszi, hogy a pálca mozgása közben a kiszemelt pontok egyike mindig az egyik, míg a másika mindig a másik horonyban mozogjon. Ha a pálca egy harmadik pontjába ceruzát helyezünk, az ellipszist fog



3. ábra. Dőlő pálca a koordináta-rendszerben

rajzolni. Esetünkben a sík lap egy bútorlap, amibe réseket vágtunk, a csúszkák pedig csavarok voltak. A csavarokat és a ceruzát a farúd különböző furataiba lehet helyezni. A bútorlapon a különböző beállításokkal nyert ellipszisek láthatók.

Azt, hogy az így kapott görbe tényleg ellipszis, az eldőlő pálca példájához hasonlóan láthatjuk be.

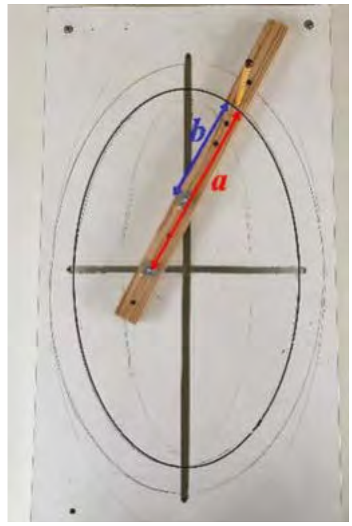
Az ellipszográfnak természetesen van számítógépen leprogramozott verziója is. Ám a tapasztalataim szerint a valóságban megépített eszköz a maga kézzelfogható mivoltában sokkal hitelesebb és ámulatba ejtőbb, mint a digitális változat. Én Gödöllőn a Református Líceumban láttam először ezt az eszközt; Pertis Szabolcs kollégám mutatta meg, és annyira lenyűgözött, hogy azonnal megszületett a vágy, hogy megépítsem és megmutassam a diákjaimnak.

Az ellipszis és a Melde-cső

A higany mérgező volta miatt a Melde-cső már csak a fizikafeladatokban jelenik meg. A vérnyomást még higanymilliméterben mérjük, de a diákok már nem látnak higanyos nyomásmérő eszközöket. Tapasztalataim szerint, ha valahol mégis találkoznak ilyennel, többnyire hőmérőnek gondolják. Melde-csövet sem forgalmaznak már, de az iskolai kémialaborok számára beszerezhető higany, és vékony üvegcsőből egy kis ügyességgel könnyen készíthetők Melde-csövek mindenféle egészségkárosodás nélkül.

Kérdés: ha a Melde-csövet a zárt végénél rögzítjük és függőleges síkban lassan körbeforgatjuk, milyen görbén mozog a bezárt levegőoszlop vége?

A mérés annál látványosabb, minél hosszabb a higanyszál, hiszen annál nagyobb a nyomás- és térfogatkülönbség a cső különböző állásai esetén. Ezért hosszú, körülbelül egy méteres lécre szerelt csöveket készítettem. Ezeket nem tudtuk a végüknél rögzíteni, középen fogtuk állványba. Feljegyeztük a különböző szögeknél mért hosszúságadatokat. A végén polárkoordinátás grafikont készítettünk, így lényegében a vizsgálandó görbe kicsinyített képe rajzolódott ki. Ez is ellipszisnek látszik, melynek nagytengelye függőleges, kistengelye vízszin-



4. ábra. Ellipszográf

tes. Vajon tényleg ellipszis-e, és ha igen, hol vannak a fókuszpontjai?

A görbe valóban ellipszis, de ennek bizonyításához érdemes az ellipszis polárkoordinátás egyenletét is megismerni. Ezt már nagyon ritkán tanulják a diákok, de nem nagyon bonyolult; éppen olyan feladat, ami megfelelő kihívás lehet egy matematika iránt fogékony diák számára projektfeladatként. Én a tábori méréshez segédanyagot adtam a diákoknak, amit párban kellett feldolgozniuk. Emlékeztetőül a függőleges nagytengelyű ellipszis polárkoordinátás egyenlete (az origót az egyik fókuszpontba helyezve):

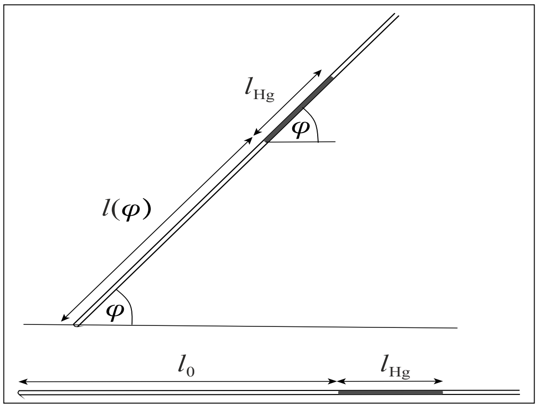
$$r = \frac{l_0}{1 + e \cdot \sin\varphi},$$

ahol l_0 az ellipszis kistengelyével párhuzamos vezérsugár hossza *(semilatus rectum), e* pedig a numerikus excentricitás.

Tekintsünk egy vízszintes Melde-csövet, amiben egy l_0 hosszúságú levegőoszlopot l_{Hg} hosszúságú higanyoszlop zár el! A külső légnyomás p_0.

Ha a cső a vízszintessel φ szöget zár be, az $l(\varphi)$ hosszúságú levegőoszlop nyomása a külső légnyomás és a

5. ábra. Diákok mérnek a Melde-csövekkel



6. ábra. A körbe forgó Melde-cső

ferde higanyoszlop hidrosztatikai nyomásának összegével egyezik meg *(6. ábra)*:

$$p(\varphi) = p_0 + l_{\mathrm{Hg}}\,\rho_{\mathrm{Hg}}\,g \cdot \sin\varphi\,.$$

A Boyle–Mariotte-törvény szerint:

$$p_0 \cdot l_0 = (p_0 + l_{\mathrm{Hg}}\,\rho_{\mathrm{Hg}}\,g \cdot \sin\varphi) \cdot l(\varphi)\,,$$

innen:

$$l(\varphi) = \frac{p_0 \cdot l_0}{p_0 + l_{\mathrm{Hg}}\rho_{\mathrm{Hg}}g \cdot \sin\varphi} = \frac{l_0}{1 + \frac{l_{\mathrm{Hg}}\rho_{\mathrm{Hg}}g}{p_0} \cdot \sin\varphi}.$$

Ezt összevetve az ellipszis polárkoordinátás egyenletével láthatjuk, hogy tényleg ellipszis rajzolódott ki a polárkoordinátás grafikonunkon, a beforrasztott végén rögzített Melde-csőbe zárt gázoszlop végpontja tényleg ellipszisen mozog. Az ellipszis egyik fókuszpontja maga a rögzítési pont, az excentricitása a függőleges higanyoszlop nyomásának és a külső légnyomásnak a hányadosa, a *semilatus rectum* pedig a vízszintes légoszlop hosszúsága.

Záró gondolatok

A dőlő pálca és a Melde-cső két önkényesen választott, talán sokak számára ismert példa, az ellipszis két különböző arcát mutatja meg. Matematikailag is másként érdemes közelíteni hozzájuk. Egy átlagos diák egyikkel sem találkozik, de a tapasztalataim szerint azok, akik fogékonyak a fizikára és a matematikára, örömmel tanulnak efféle dolgokat, büszkeséggel tölti el őket, hogy valamit megtapasztalnak, és azt számítással is alá tudják támasztani.

Ha valaki szívesen megismételné vagy továbbfejlesztené a projektet, a Berzsenyi Gimnázium fizikatáborának honlapján megtalálja a mérési feladatlapokat, a matematikai segédanyagokat és a Melde-cső készítésének leírását is [4].

Irodalom

1. https://sites.google.com/berzsenyi.hu/bdgfizikatabor/ (2023. 08. 23.)
2. Gnädig Péter, Honyek Gyula, Vigh Máté: 333+ furfangos feladat fizikából Typotex, Budapest 2017., 230. feladat
3. Bokor Nándor*:* Milyen alakú a száguldó autó kereke? *Fizikai Szemle* 68/6 (2018) 203–209.
4. https://sites.google.com/berzsenyi.hu/bdgfizikatabor/f%C5%91oldal/2023-kir%C3%A1lyr%C3%A9t?authuser=0 (2023. 08. 23.)